

Endomorphismes aléatoires dans les espaces projectifs II

Henry de Thélin

Résumé

Nous étudions des suites aléatoires d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Abstract

We study random holomorphic endomorphisms of $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

Mots-clefs : dynamique complexe, applications aléatoires, entropie.

Classification : 32U40, 32H50.

Introduction

A partir d'un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, f , de degré $d \geq 2$, Fornæss et Sibony ont défini le courant de Green T associé à f (voir [13] et [14]), dont le support est l'ensemble de Julia de f . Si ω désigne la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, le courant de Green est obtenu comme limite au sens des courants de la suite $\frac{(f^n)^*\omega}{d^n}$.

Ce courant possède un potentiel continu : on peut donc définir son auto-intersection $\mu = T^k$ (voir [13]). La mesure μ ainsi obtenue est l'unique mesure d'entropie maximale $k \log(d)$ (voir [5]) et elle a ses exposants de Lyapunov minorés par $\frac{\log(d)}{2}$ (voir [4]). Par ailleurs, μ est la limite de la suite de probabilités $\frac{(f^n)^*\omega^k}{d^{kn}}$.

Les convergences des suites $\frac{(f^n)^*\omega}{d^n}$ et $\frac{(f^n)^*\omega^k}{d^{kn}}$ ont été généralisées dans plusieurs directions. L'une d'entre elle consiste à remplacer f^n par $f_n \circ \dots \circ f_0$ où les f_n sont soit des endomorphismes holomorphes aléatoires proches d'un endomorphisme holomorphe f (voir [12] et [15]), soit, dans le cas des mesures, des applications méromorphes qui vérifient certaines propriétés (voir [10]). Dans l'article précédent (voir [8]), nous avons généralisé ce type de résultat. Précisons tout d'abord les théorèmes que nous avons obtenus.

L'ensemble des applications rationnelles de degré d de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ forme un espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ où $N = (k+1)\frac{(d+k)!}{d!k!} - 1$. Dans cet espace $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, on notera \mathcal{H}_d les points qui correspondent à des endomorphismes holomorphes de degré d de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et \mathcal{M} le complémentaire de \mathcal{H}_d dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Considérons F une application mesurable de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et Λ une mesure ergodique et invariante par F (par exemple F un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ et Λ sa mesure de Green). Si f_0 est un point de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ (que l'on prendra générique pour Λ), on peut considérer la suite $f_n = F^n(f_0)$. Cela donne une suite d'applications rationnelles qui suit en quelque sorte une loi dictée par Λ .

Pour $f_0 \in \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, on notera $f_i = F^i(f_0)$ ($i \in \mathbb{N}$) et F_n la composée $F_n = f_n \circ \dots \circ f_0$ (pour $n \in \mathbb{N}$). On a montré dans [8] le

Théorème. *On suppose que*

$$\int \log \text{dist}(f, \mathcal{M}) d\Lambda(f) > -\infty.$$

Alors il existe un ensemble A de mesure pleine pour Λ tel que pour tout endomorphisme holomorphe f_0 de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ avec $f_0 \in A$, on ait $\frac{F_n^ \omega}{d^{n+1}}$ qui converge vers un courant $T(f_0)$. Ce courant est appelé courant de Green aléatoire (associé à f_0).*

Dans [8], on a vu que le courant de Green aléatoire ci-dessus est à potentiel continu : on peut donc définir son auto-intersection $T(f_0)^l$ pour l compris entre 1 et k . Pour $l = k$, on appelle $\mu(f_0) = T(f_0)^k$ mesure de Green aléatoire (associée à f_0).

Rappelons (voir [8]) que l'ensemble A ci-dessus est l'ensemble des bons points pour le théorème de Birkhoff pour la mesure Λ et la fonction intégrable $\log \text{dist}(f, \mathcal{M})$. Il vérifie $F(A) \subset A$. En particulier, dès que f_0 est dans A , on peut définir les courants $T(f_i)^l$ pour $i \in \mathbb{N}$. Ces courants ont des propriétés d'invariance : on a $d^{-l} f_i^* T(f_{i+1})^l = T(f_i)^l$ et $(f_i)_* T(f_i)^l = d^{k-l} T(f_{i+1})^l$. Grâce à ces invariances, nous avons obtenu dans [8] un théorème de mélange aléatoire :

Théorème 1. *On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes holomorphes de degrés $d \geq 2$ et une suite de probabilités $(\mu(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $f_n^*(\mu(f_{n+1})) = d^k \mu(f_n)$ et $\mu(f_n) = (\omega + dd^c g_n)^k$ avec g_n des fonctions continues.*

Alors pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{P}^k)$ et $\psi \in DSH(\mathbb{P}^k)$, on a

$$|\langle \mu(f_0), (f_{n-1} \circ \dots \circ f_0)^* \varphi \psi \rangle - \langle \mu(f_n), \varphi \rangle \langle \mu(f_0), \psi \rangle| \leq C d^{-n} (1 + \|g_n\|_\infty)^2 \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_{DSH}.$$

Ici C est une constante qui ne dépend que de \mathbb{P}^k .

Classiquement, les applications aléatoires peuvent se voir d'une autre façon : avec un produit semi-direct. C'est ce que nous allons faire dans cet article. Les produits semi-directs ont été étudiés dans [18] et [19] dans le cas où les fibres sont de dimension 1. Ici on considère des fibres de dimension quelconque. Soit $X = \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et $\tau : X \rightarrow X$ définie par $\tau(f, x) = (F(f), f(x))$. Pour $f \in A$, on a des mesures $\mu(f)$ et elles ont comme propriété d'invariance $f_* \mu(f) = \mu(F(f))$ et $f^* \mu(F(f)) = d^k \mu(f)$.

Sur l'espace X , on peut définir (voir le paragraphe 1) une mesure α telle que pour tout borélien B de X

$$\alpha(B) := \int \mu(f)(B \cap \{f\} \times \mathbb{P}^k(\mathbb{C})) d\Lambda(f)$$

où l'on identifie $\{f\} \times \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ avec $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

On obtient alors

Proposition 2. *On suppose que*

$$\int \log \text{dist}(f, \mathcal{M}) d\Lambda(f) > -\infty.$$

La mesure α ci-dessus est bien définie, elle est invariante par τ et ergodique. Si Λ est mélangeante, α l'est aussi.

A partir d'une mesure β invariante par l'application τ , Abramov et Rohlin ont défini une notion d'entropie mixée $h_{\beta, \text{mix}}$ (voir [1] et [21]). Cette entropie vérifie une inégalité : si $h_{\text{top}}(\Lambda)$ désigne l'entropie topologique aléatoire associée à Λ (voir [20], [21] et le paragraphe 2.2), on a $h_{\beta, \text{mix}} \leq h_{\text{top}}(\Lambda)$ par [20] et [21]. Dans cet article, nous montrons que $h_{\text{top}}(\Lambda)$ est majorée par $k \log d$ et que l'entropie mixée de α est minorée par $k \log d$. On aura alors

Théorème 3. *On suppose que $\int \log \text{dist}(f, \mathcal{M}) d\Lambda(f) > -\infty$.*

Alors

$$h_{\alpha, \text{mix}} = h_{\text{top}}(\Lambda) = k \log d.$$

La mesure α est donc d'entropie mixée maximale.

Dans un dernier paragraphe, nous montrerons un théorème d'hyperbolicité pour les mesures $\mu(f)$ comme dans [7]. Ce théorème donnera une généralisation du résultat de Briend et Duval (voir [4]) : moralement, lorsque l'on part de (f_1, x) générique pour α , on verra que $\|D(f_n \circ \dots \circ f_1)(x)v\| \gtrsim d^{n/2}$ pour tout vecteur unitaire v . Plus exactement, il s'agira de montrer que les exposants de Lyapounov de α associé à un certain cocycle sont minorés par $\frac{\log d}{2}$ quand on a $\int \log \text{dist}(f, \mathcal{M}) d\Lambda(f) > -\infty$.

Remerciements : C'est avec plaisir que je remercie Jérôme Buzzi pour les discussions que nous avons eues sur le théorème d'Oseledets dans le cas non-intégrable.

1 Propriétés de la mesure α

Dans ce paragraphe, nous montrons que α est bien définie, invariante par τ et ergodique. Nous montrerons aussi qu'elle est mélangeante lorsque Λ l'est.

1.1 Définition de α

Rappelons que l'on note A l'ensemble des bons points du théorème de Birkhoff pour la mesure Λ et la fonction intégrable $\log \text{dist}(f, \mathcal{M})$.

Pour montrer que la mesure α est bien définie, il suffit de voir que pour B borélien de X , $f \rightarrow \chi_A(f)\mu(f)(B \cap \{f\} \times \mathbb{P}^k)$ est mesurable pour Λ ce qui revient à montrer que pour φ fonction continue sur X la fonction $f \rightarrow \chi_A(f) \int \varphi(f, x)\mu(f)(x)$ est mesurable pour Λ .

On a vu, dans l'article précédent ([8]), que pour $f_0 \in A$, $\mu(f_0)$ est limite de $\mu_n(f_0) = \frac{F_n^* \omega^k}{d(n+1)^k}$ où $F_n = f_n \circ \dots \circ f_0$ et $f_i = F^i(f_0)$. Comme $f_0 \in A$, les endomorphismes f_i ne sont pas dans \mathcal{M} (car $F(A) \subset A$ et $A \cap \mathcal{M} = \emptyset$). Les coefficients de la forme lisse $\mu_n(f_0)$ évalués en x dépendent donc de façon mesurable de f_0 et x . En particulier $f \rightarrow \chi_A(f) \int \varphi(f, x)d\mu_n(f)(x)$ est mesurable pour Λ et par passage à la limite $f \rightarrow \chi_A(f) \int \varphi(f, x)\mu(f)(x)$ aussi.

1.2 La mesure α est invariante par τ

Classiquement, c'est la relation $f_*\mu(f) = \mu(F(f))$ qui donne l'invariance de α . En effet, si φ est une fonction continue sur X , on a

$$\int \varphi \circ \tau d\alpha = \int \int \varphi \circ \tau(f, x) d\mu(f)(x) d\Lambda(f) = \int \int \varphi(F(f), f(x)) d\mu(f)(x) d\Lambda(f).$$

Comme on a $f_*\mu(f) = \mu(F(f))$,

$$\int \varphi \circ \tau d\alpha = \int \int \varphi(F(f), x) d\mu(F(f))(x) d\Lambda(f).$$

Maintenant, si on pose $\psi(f) = \int \varphi(f, x) d\mu(f)(x)$,

$$\int \varphi \circ \tau d\alpha = \int \psi(F(f)) d\Lambda(f) = \int \psi(f) d\Lambda(f)$$

par invariance de Λ par F . Finalement,

$$\int \varphi \circ \tau d\alpha = \int \int \varphi(f, x) d\mu(f)(x) d\Lambda(f) = \int \varphi d\alpha$$

ce qui signifie que α est invariante par τ .

1.3 Ergodicité et mélange pour α

Montrons d'abord que le fait que Λ est ergodique implique que α l'est aussi. La démonstration va reposer sur le théorème de mélange aléatoire (voir le théorème 2 dans [8]).

Soient φ et ψ des fonctions C^∞ sur X . Il s'agit de montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi(\tau^i(f, x)) \psi(f, x) d\alpha(f, x) \longrightarrow \int \varphi d\alpha \int \psi d\alpha.$$

Soit $a_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi(\tau^i(f, x)) \psi(f, x) d\mu(f)(x)$ pour $f \in A$.

On a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi(\tau^i(f, x)) \psi(f, x) d\alpha(f, x) = \int a_n(f) d\Lambda(f).$$

Si $f_0 \in A$, on a (on note $f_i = F^i(f_0)$)

$$a_n(f_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi(F^i(f_0), f_{i-1} \circ \cdots \circ f_0(x)) \psi(f_0, x) d\mu(f_0)(x)$$

ce qui s'écrit, en posant $h_i(x) = \varphi(F^i(f_0), x)$

$$a_n(f_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int (f_{i-1} \circ \cdots \circ f_0)^* h_i(x) \psi(f_0, x) d\mu(f_0)(x).$$

Utilisons maintenant le théorème 2 de [8]. On a (en notant ψ au lieu de $x \rightarrow \psi(f_0, x)$)

$$|\langle \mu(f_0), (f_{i-1} \circ \cdots \circ f_0)^* h_i \psi \rangle - \langle \mu(f_i), h_i \rangle \langle \mu(f_0), \psi \rangle| \leq C d^{-i} (1 + \|g_i\|_\infty)^2 \|h_i\|_\infty \|\psi\|_{\text{DSH}}$$

c'est-à-dire

$$\left| a_n(f_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle \mu(f_i), h_i \rangle \langle \mu(f_0), \psi \rangle \right| \leq \frac{C}{n} \sum_{i=0}^{n-1} d^{-i} (1 + \|g_i\|_\infty)^2 \|h_i\|_\infty \|\psi\|_{\text{DSH}}$$

avec C qui ne dépend que de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. La norme sup $\|h_i\|_\infty$ est plus petite que $\|\varphi\|_\infty$, il reste donc à contrôler g_i .

Soit $\epsilon > 0$. On a démontré dans le lemme 19 de [8] qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $\|g_n\|_\infty \leq e^{\epsilon n}$ pour $n \geq n_0$. Pour $n \geq n_0$, on a alors

$$\begin{aligned} & \left| a_n(f_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle \mu(f_i), h_i \rangle \langle \mu(f_0), \psi \rangle \right| \\ & \leq \frac{C}{n} \sum_{i=0}^{n_0-1} d^{-i} (1 + \|g_i\|_\infty)^2 \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_{\text{DSH}} + \frac{C}{n} \sum_{i=n_0}^{n-1} d^{-i} (e^{2\epsilon i})^2 \|\varphi\|_\infty \|\psi\|_{\text{DSH}} \end{aligned}$$

qui converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

On vient de montrer que pour $f_0 \in A$, $\alpha_n(f_0) = a_n(f_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \langle \mu(f_i), h_i \rangle \langle \mu(f_0), \psi \rangle$ converge vers 0.

Par ailleurs, comme les $\mu(f_i)$ sont des probabilités, on a $|\alpha_n(f_0)| \leq 2\|\varphi\|_\infty \|\psi\|_\infty$ et alors

$$\int \alpha_n(f_0) d\Lambda(f_0) = \int a_n(f_0) d\Lambda(f_0) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \langle \mu(f_i), h_i \rangle \langle \mu(f_0), \psi \rangle d\Lambda(f_0)$$

tend vers 0.

Maintenant, si on note $\alpha(f) = \int \varphi(f, x) d\mu(f)(x)$ et $\beta(f) = \int \psi(f, x) d\mu(f)(x)$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \langle \mu(f_i), h_i \rangle \langle \mu(f_0), \psi \rangle d\Lambda(f_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \alpha(F^i(f)) \beta(f) d\Lambda(f)$$

qui converge vers

$$\int \alpha(f) d\Lambda(f) \int \beta(f) d\Lambda(f)$$

car Λ est ergodique.

Finalement, on a montré que

$$\int a_n(f) d\Lambda(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \int \varphi(\tau^i(f, x)) \psi(f, x) d\alpha(f, x)$$

converge vers

$$\int \alpha(f) d\Lambda(f) \int \beta(f) d\Lambda(f) = \int \varphi d\alpha \int \psi d\alpha.$$

C'est ce que l'on voulait démontrer.

Pour montrer que α est mélangeante lorsque Λ l'est, il suffit de montrer que

$$\int \varphi(\tau^n(f, x)) \psi(f, x) d\alpha(f, x) \longrightarrow \int \varphi d\alpha \int \psi d\alpha$$

pour φ et ψ des fonctions C^∞ .

En reprenant la preuve précédente en enlevant tous les $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1}$, on voit que cela revient au fait que (on garde les mêmes notations)

$$\int \alpha(F^n(f)) \beta(f) d\Lambda(f) \longrightarrow \int \alpha(f) d\Lambda(f) \int \beta(f) d\Lambda(f).$$

Mais cette convergence est vraie car Λ est mélangeante.

2 Entropie

Dans un premier paragraphe, nous allons rappeler la définition d'entropie mixée (ou relative) introduite par Abramov et Rohlin (voir [1] et [21]) ainsi que la formule qui relie l'entropie métrique de α , celle de Λ et l'entropie mixée. Dans le second, nous définirons l'entropie topologique aléatoire $h_{\text{top}}(\Lambda)$ et nous en donnerons une majoration par $k \log d$. Dans le troisième paragraphe, nous montrerons que l'entropie mixée de α est maximale et vaut $k \log d$. Cela généralise certains résultats de Jonsson au cas où les fibres du produit semi-direct ont une dimension plus grande que 1 (voir [19]).

2.1 Entropie mixée

Commençons par rappeler la définition d'entropie mixée associée à la mesure α . Cette entropie a été introduite par Abramov et Rohlin dans [1] dans le cas où α est un produit de mesure. Cette définition a ensuite été étendue au cadre qui nous concerne par Ledrappier et Walters (voir [21] et aussi [2] pour la définition que l'on va prendre).

On a tout d'abord (voir [2] théorème 2.2)

Proposition 4. *Soit ξ une partition finie de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Pour Λ presque tout f_1 la limite suivante*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_{\mu(f_1)} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f_i \circ \dots \circ f_1)^{-1}(\xi) \right)$$

existe et est constante. Sa valeur est notée $h_{\alpha, \text{mix}}(\xi)$.

Ici par convention $(f_i \circ \dots \circ f_1)^{-1}$ vaut l'identité si $i = 0$.

On définit alors l'entropie mixée par

$$h_{\alpha, \text{mix}} = \sup h_{\alpha, \text{mix}}(\xi)$$

où le sup est pris sur l'ensemble des partitions finies ξ de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$.

On a maintenant trois quantités : les entropies métriques $h_{\alpha}(\tau)$ et $h_{\Lambda}(F)$ ainsi que l'entropie mixée $h_{\alpha, \text{mix}}$. Si on note π la projection de $\mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, on a $\pi_*\alpha = \Lambda$ et les quantités précédentes sont donc reliées par une formule qui est due à Abramov et Rohlin (voir [1]) :

Théorème 5. *(Abramov-Rohlin [1])*

On a $h_{\alpha}(\tau) = h_{\Lambda}(F) + h_{\alpha, \text{mix}}$.

Dans [1], le théorème ci-dessus est donné dans le cas où α est le produit de deux mesures. Cela a été généralisé à notre cadre par Ledrappier-Walters (voir [21]) et Bogenschütz-Crauel (voir [3]).

2.2 Entropie topologique

Commençons par rappeler la définition d'entropie topologique dans le cadre des applications aléatoires (voir [20] p.67 et suivantes).

Si β est un recouvrement de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ par des ouverts, on notera $N(\beta)$ le nombre minimal d'ensemble de β pour recouvrir $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ (c'est un nombre fini car $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est compact). On pose $\mathcal{H}(\beta) = \log N(\beta)$. La proposition suivante permet de définir l'entropie topologique :

Proposition 6. *Il existe une constante $h(\beta)$ telle que pour Λ -presque tout f_1 la limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathcal{H} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f_i \circ \dots \circ f_1)^{-1}(\beta) \right)$$

existe et vaut $h(\beta)$. Ici on prend encore la convention que $f_i \circ \dots \circ f_1$ vaut l'identité si $i = 0$.

Démonstration. On commence par prendre f_1 dans l'ensemble A de sorte que tous les f_i soient des endomorphismes holomorphes.

Maintenant, en suivant exactement la preuve de [20] p.69 et en posant

$$b_n(f_1) = \mathcal{H} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f_i \circ \dots \circ f_1)^{-1}(\beta) \right) = \mathcal{H} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (F^{i-1}(f_1) \circ \dots \circ f_1)^{-1}(\beta) \right),$$

on a

$$b_{n+m}(f_1) \leq b_n(f_1) + b_m(F^n(f_1)).$$

On conclut alors en utilisant le théorème sous-additif de Kingman car Λ est ergodique. \square

L'entropie topologique aléatoire se définit par

$$h_{\text{top}}(\Lambda) = \sup h(\beta).$$

Remarquons que c'est une quantité qui dépend de F et Λ que l'on a choisis au départ. Comme dans [20], on peut définir cette entropie d'une autre façon.

Pour f_1 dans l'ensemble A , on dira qu'un ensemble E est (n, ϵ, f_1) -séparé si pour tous x et y dans E avec $x \neq y$, on a

$$d_{f_1}^n(x, y) := \max_{i=0, \dots, n-1} \text{dist}(f_i \circ \dots \circ f_1(x), f_i \circ \dots \circ f_1(y)) \geq \epsilon.$$

On note $s(n, \epsilon, f_1)$ le cardinal maximal d'un ensemble (n, ϵ, f_1) -séparé dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Alors

Proposition 7. *Pour Λ presque tout f_1 , on a*

$$h_{top}(\Lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon, f_1) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon, f_1).$$

La preuve est faite dans [20] p.72-74.

Il y a une inégalité entre l'entropie mixée et l'entropie topologique définie ci-dessus. Elle résulte d'une adaptation facile de [20] p. 78 (voir aussi [21] pour un résultat plus complet dans le cas continu). En effet, on a

Théorème 8.

$$h_{\alpha, mix} \leq h_{top}(\Lambda).$$

Nous verrons dans la suite que α est une mesure d'entropie mixée maximale, c'est-à-dire que l'inégalité du théorème ci-dessus est en fait une égalité.

En utilisant des arguments de Gromov (voir [17]), on va d'abord majorer l'entropie topologique $h_{top}(\Lambda)$. On a

Théorème 9.

$$h_{top}(\Lambda) \leq k \log d.$$

Démonstration. On considère $f_1 \in A$ qui vérifie la conclusion de la proposition précédente.

Soit $\{x_1, \dots, x_N\}$ un ensemble (n, ϵ, f_1) -séparé dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de cardinal maximal. Pour $i = 1, \dots, N$, les x_i donnent des points

$$X_i = (x_i, f_1(x_i), f_2 \circ f_1(x_i), \dots, f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x_i))$$

qui sont ϵ -séparés dans $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$. Les boules $B(X_i, \frac{\epsilon}{2})$ sont donc disjointes. Si on note

$$\Gamma_n = \{(x, f_1(x), f_2 \circ f_1(x), \dots, f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x)), x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})\}$$

le théorème de Lelong implique que le volume de Γ_n intersecté avec une boule $B(X_i, \frac{\epsilon}{2})$ est minoré par $C(k) \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2k}$. Cela donne une minoration du volume de Γ_n par $C(k) \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2k} N$.

Majorons maintenant ce volume en utilisant la cohomologie des applications f_i .

Soit $\omega_n = \sum_{i=1}^n \pi_i^* \omega$ où π_i ($i = 1, \dots, n$) est la projection de $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$ sur sa i -ème coordonnée et ω est la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Le volume de Γ_n est égal à

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} \omega_n^k &= \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_k \leq n} \int_{\Gamma_n} \pi_{n_1}^* \omega \wedge \dots \wedge \pi_{n_k}^* \omega \\ &= \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_k \leq n} \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} (f_{n_1-1} \circ \dots \circ f_1)^* \omega \wedge \dots \wedge (f_{n_k-1} \circ \dots \circ f_1)^* \omega. \end{aligned}$$

Comme f_1 est dans A , les f_i sont des endomorphismes holomorphes de degré d . En particulier, $(f_{n_i-1} \circ \dots \circ f_1)^* \omega$ est cohomologue à $d^{n_i-1} \omega$ et alors

$$\int_{\Gamma_n} \omega_n^k = \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_k \leq n} d^{n_1 + \dots + n_k} d^{-k} \leq n^k d^{-k} d^{nk}.$$

On obtient ainsi

$$N \leq \frac{n^k d^{-k} d^{nk}}{C(k) \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{2k}}$$

ce qui donne le théorème. □

2.3 Quelques propriétés de l'entropie mixée

Dans ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés sur l'entropie qui nous seront utiles pour la suite.

Commençons par énoncer un théorème du type Shannon-McMillan-Breiman pour les applications aléatoires. Soit $\xi = \{A_1, \dots, A_p\}$ une partition finie de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et f_1 un endomorphisme dans A . On note

$$I_{\mu(f_1)}(\xi)(x) = - \sum_{i=1}^p \chi_{A_i}(x) \log \mu(f_1)(A_i).$$

Par le théorème 4.2 de [2], on a

Théorème 10. *Soit ξ une partition finie. Pour α presque tout (f_1, x)*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} I_{\mu(f_1)} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (f_i \circ \dots \circ f_1)^{-1}(\xi) \right) (x) = h_{\alpha, \text{mix}}(\xi).$$

L'entropie mixée de α est plus petite que $k \log d$. C'est donc une quantité finie et on peut aussi appliquer le théorème 2.1 de [25] qui est un théorème du type Brin-Katok pour les applications aléatoires. On note ici $B_{d_{f_1}^n}(x, \epsilon)$ la boule de centre x et de rayon ϵ pour la métrique $d_{f_1}^n$ définie précédemment :

Théorème 11. *Pour α presque tout (f_1, x) on a :*

$$\begin{aligned} h_{\alpha, \text{mix}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(f_1)(B_{d_{f_1}^n}(x, \epsilon)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(f_1)(B_{d_{f_1}^n}(x, \epsilon)). \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que α est d'entropie mixée maximale. On a même mieux car :

Théorème 12.

$$h_{\alpha, mix} = h_{top}(\Lambda) = k \log d.$$

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il suffit de suivre la preuve du théorème 5.2 de [19] en changeant $\log d$ par $k \log d$ et μ_x par $\mu(f_1)$. En effet, d'une part la mesure $\mu(f_1)$ ne charge pas les sous-ensembles analytiques de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ car elle est égale à $T(f_1)^k$ où $T(f_1)$ est un $(1, 1)$ courant à potentiel continu. D'autre part, on a la relation $f_1^* \mu(f_2) = d^k \mu(f_1)$ pour $f_1 \in A$ (voir [8]).

□

3 Exposants de Lyapounov et hyperbolicité de la mesure α

Il s'agit ici d'étudier la dynamique de la suite f_0, \dots, f_n pour f_0 générique pour Λ . Pour cela, nous allons estimer des exposants de Lyapounov associés à un certain cocycle pour la mesure α .

Commençons par décrire ce cocycle.

3.1 Cocycle et théorème d'Oseledets

On note toujours $X = \mathbb{P}^N(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et $\tau : X \rightarrow X$ définie par $\tau(f, x) = (F(f), f(x))$. Soit

$$\widehat{X} := \{\widehat{\beta} = (\dots, \beta_{-n}, \dots, \beta_0, \dots, \beta_n, \dots) \in X^{\mathbb{Z}}, \tau(\beta_n) = \beta_{n+1} \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Dans cet espace, τ induit une application σ qui est le décalage à gauche et si on note π la projection canonique $\pi(\widehat{\beta}) = \beta_0$, la probabilité α se relève en une probabilité $\widehat{\alpha}$ invariante par σ , ergodique et qui vérifie $\pi_* \widehat{\alpha} = \alpha$.

Si on considère $\mathcal{I} = \{\beta = (f, x) \in X \text{ avec } x \in I(f)\}$ où $I(f)$ est l'ensemble d'indétermination de f , on a

$$\alpha(\mathcal{I}) = \int \mu(f)(\mathcal{I} \cap \{f\} \times \mathbb{P}^k(\mathbb{C})) d\Lambda(f) = \int \mu(f)(I(f)) d\Lambda(f) = 0$$

car par hypothèse $\int \log \text{dist}(f, \mathcal{M}) d\Lambda(f) > -\infty$, ce qui signifie que $I(f)$ est vide pour Λ presque tout f .

En particulier, si on pose

$$\widehat{X}^* := \{\widehat{\beta} \in \widehat{X}, \beta_n \notin \mathcal{I}, \forall n \in \mathbb{Z}\},$$

cet ensemble est invariant par σ et on a $\widehat{\alpha}(\widehat{X}^*) = 1$.

Maintenant, on munit $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ d'une famille de cartes $(\tau_x)_{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})}$ telles que $\tau_x(0) = x$, τ_x est définie sur une boule $B(0, \epsilon_0) \subset \mathbb{C}^k$ avec ϵ_0 indépendant de x et la norme de la dérivée première et seconde de τ_x sur $B(0, \epsilon_0)$ est majorée par une constante indépendante de x .

Pour construire ces cartes il suffit de partir d'une famille finie (U_i, ψ_i) de cartes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et de les composer par des translations.

Dans toute la suite, si $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une application rationnelle, on notera $f_x = \tau_{f(x)}^{-1} \circ f \circ \tau_x$ qui est définie au voisinage de 0 quand x n'est pas dans $I(f)$.

Le cocycle auquel nous allons appliquer la théorie de Pesin est le suivant :

$$\begin{aligned} A : \widehat{X}^* &\longrightarrow M_k(\mathbb{C}) \\ \widehat{\beta} &\longrightarrow Df_x(0) \end{aligned}$$

où $M_k(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées $k \times k$ à coefficients dans \mathbb{C} et $\pi(\widehat{\beta}) = \beta = (f, x)$. Afin d'avoir un théorème du type Oseledets, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 13.

$$\int \log^+ \|A(\widehat{\beta})\| d\widehat{\alpha}(\widehat{\beta}) < +\infty.$$

Démonstration. Pour $\beta = (f, x)$, on pose $h(\beta) = \log^+ \|Df_x(0)\|$. On a alors si $\pi(\widehat{\beta}) = \beta$,

$$\begin{aligned} \int \log^+ \|A(\widehat{\beta})\| d\widehat{\alpha}(\widehat{\beta}) &= \int h(\beta) d\widehat{\alpha}(\widehat{\beta}) \\ &= \int h \circ \pi(\widehat{\beta}) d\widehat{\alpha}(\widehat{\beta}) = \int h(\beta) d\alpha(\beta) \\ &= \int \int \log^+ \|Df_x(0)\| d\mu(f)(x) d\Lambda(f). \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\|Df_x(0)\| \leq C \|Df(x)\| \leq C' \text{dist}(f, \mathcal{M})^{-p}$$

(voir la démonstration de la proposition 3 de [8]). Le lemme découle donc de l'intégrabilité de la fonction $\log \text{dist}(f, \mathcal{M})$ pour la mesure Λ . □

Grâce à ce lemme, on obtient un théorème du type Oseledets (voir [16] et [24] ainsi que le théorème 2.3 de [23], le théorème 6.1 dans [11] et [22]) :

Théorème 14. *Il existe des réels $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l \geq -\infty$, des entiers m_1, \dots, m_l et un ensemble $\widehat{\Gamma}$ de mesure pleine pour $\widehat{\alpha}$ tels que pour $\widehat{\beta} \in \widehat{\Gamma}$ on ait une décomposition de \mathbb{C}^k de la forme $\mathbb{C}^k = \bigoplus_{i=1}^l E_i(\widehat{\beta})$ où les $E_i(\widehat{\beta})$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension m_i qui vérifient :*

- 1) $A(\widehat{\beta})E_i(\widehat{\beta}) \subset E_i(\sigma(\widehat{\beta}))$ avec égalité si $\lambda_i > -\infty$.
- 2) Pour $v \in E_i(\widehat{\beta}) \setminus \{0\}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|A(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta})) \cdots A(\widehat{\beta})\| = \lambda_i.$$

Si de plus, $\lambda_i > -\infty$, on a la même limite quand n tend vers $-\infty$.

Pour tout $\gamma > 0$, il existe une fonction $C_\gamma : \widehat{\Gamma} \rightarrow GL_k(\mathbb{C})$ telle que pour $\widehat{\beta} \in \widehat{\Gamma}$:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|C_\gamma^{\pm 1}(\sigma^n(\widehat{\beta}))\| = 0$ (on parle de fonction tempérée).

2) $C_\gamma(\widehat{\beta})$ envoie la décomposition standard $\bigoplus_{i=1}^l \mathbb{C}^{m_i}$ sur $\bigoplus_{i=1}^l E_i(\widehat{\beta})$.

3) La matrice $A_\gamma(\widehat{\beta}) = C_\gamma^{-1}(\sigma(\widehat{\beta}))A(\widehat{\beta})C_\gamma(\widehat{\beta})$ est diagonale par bloc $(A_\gamma^1(\widehat{\beta}), \dots, A_\gamma^l(\widehat{\beta}))$

où chaque $A_\gamma^i(\widehat{\beta})$ est une matrice carrée $m_i \times m_i$ et

$$\forall v \in \mathbb{C}^{m_i} \quad \text{on a} \quad e^{\lambda_i - \gamma} \|v\| \leq \|A_\gamma^i(\widehat{\beta})v\| \leq e^{\lambda_i + \gamma} \|v\|$$

si $\lambda_i > -\infty$ et

$$\forall v \in \mathbb{C}^{m_i} \quad \|A_\gamma^l(\widehat{\beta})v\| \leq e^\gamma \|v\|$$

si $\lambda_l = -\infty$.

Remarque. La dernière estimée est donnée sous une forme que l'on utilisera mais on peut l'améliorer : en fait si on fixe $\gamma > 0$ et $B > 0$, il existe une fonction $C_{\gamma,B} : \widehat{\Gamma} \rightarrow GL_k(\mathbb{C})$ qui vérifie les propriétés ci-dessus et pour la dernière, si on note $A_{\gamma,B}(\widehat{\beta}) = C_{\gamma,B}^{-1}(\sigma(\widehat{\beta}))A(\widehat{\beta})C_{\gamma,B}(\widehat{\beta})$, on a $\forall v \in \mathbb{C}^{m_i} \quad \|A_{\gamma,B}^l(\widehat{\beta})v\| \leq e^{-B} \|v\|$.

Notons maintenant $g_{\widehat{\beta}}$ la lecture de f_x dans les cartes C_γ c'est-à-dire $g_{\widehat{\beta}} = C_\gamma^{-1}(\sigma(\widehat{\beta})) \circ f_x \circ C_\gamma(\widehat{\beta})$ où $\pi(\widehat{\beta}) = \beta = (f, x)$. On considère aussi C et $p \geq 5$ tels que

$$\|Df(x)\| + \|D^2f(x)\| \leq C \text{dist}(f, \mathcal{M})^{-p}$$

(voir la démonstration du lemme 6 de [8] et le lemme 2.1 de [9]). Dans l'expression précédente est s'est implicitement placé dans une des cartes ψ_i de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Grâce au théorème précédent, on a alors

Proposition 15. *Il existe une constante ϵ_1 qui ne dépend que de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ telle que pour $\widehat{\beta} \in \widehat{\Gamma}$ on ait*

1) $g_{\widehat{\beta}}(0) = 0$.

2) $Dg_{\widehat{\beta}}(0) = A_\gamma(\widehat{\beta})$.

3) Si on note $g_{\widehat{\beta}}(w) = Dg_{\widehat{\beta}}(0)w + h(w)$, on a

$$\|Dh(w)\| \leq C \|C_\gamma^{-1}(\sigma(\widehat{\beta}))\| \|C_\gamma(\widehat{\beta})\|^2 \text{dist}(f, \mathcal{M})^{-p} \|w\|$$

$$\text{pour } \|w\| \leq \frac{\epsilon_1 \text{dist}(f, \mathcal{M})^p}{C \|C_\gamma(\widehat{\beta})\|}.$$

Démonstration. Commençons par montrer que $g_{\widehat{\beta}}(w)$ est défini pour $\|w\| \leq \frac{\epsilon_1 \text{dist}(f, \mathcal{M})^p}{C \|C_\gamma(\widehat{\beta})\|}$.

Par construction des cartes τ_x , on peut trouver ϵ_1 qui ne dépend que de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ tel que pour $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ les τ_x sont définis sur $B(0, \epsilon_1)$ et les τ_x^{-1} sur $B(x, \epsilon_1)$.

Pour $\|w\| \leq \frac{\epsilon_1}{\|C_\gamma(\hat{\beta})\|}$, on a

$$\begin{aligned} \text{dist}(f \circ \tau_x \circ C_\gamma(\hat{\beta})(w), f(x)) &= \text{dist}(f \circ \tau_x \circ C_\gamma(\hat{\beta})(w), f \circ \tau_x(0)) \\ &\leq C \text{dist}(f, \mathcal{M})^{-p} \|C_\gamma(\hat{\beta})(w)\| \leq C \text{dist}(f, \mathcal{M})^{-p} \|C_\gamma(\hat{\beta})\| \|w\|. \end{aligned}$$

Le dernier terme est plus petit que ϵ_1 si $\|w\| \leq \frac{\epsilon_1 \text{dist}(f, \mathcal{M})^p}{C \|C_\gamma(\hat{\beta})\|}$, ce qui signifie que $g_{\hat{\beta}}(w)$ est défini pour de tels w .

Passons à la preuve de la proposition.

Le point 1 est évident et le point 2 découle du théorème précédent.

Pour le troisième point :

$$Dg_{\hat{\beta}}(w) = Dg_{\hat{\beta}}(0) + Dh(w), \text{ d'où pour } \|w\| \leq \frac{\epsilon_1 \text{dist}(f, \mathcal{M})^p}{C \|C_\gamma(\hat{\beta})\|}$$

$$\begin{aligned} \|Dh(w)\| &= \|Dg_{\hat{\beta}}(w) - Dg_{\hat{\beta}}(0)\| \\ &= \|C_\gamma^{-1}(\sigma(\hat{\beta})) \circ Df_x(C_\gamma(\hat{\beta})(w)) \circ C_\gamma(\hat{\beta}) - C_\gamma^{-1}(\sigma(\hat{\beta})) \circ Df_x(0) \circ C_\gamma(\hat{\beta})\| \\ &\leq \|C_\gamma^{-1}(\sigma(\hat{\beta}))\| \|Df_x(C_\gamma(\hat{\beta})(w)) - Df_x(0)\| \|C_\gamma(\hat{\beta})\| \\ &\leq C \|C_\gamma^{-1}(\sigma(\hat{\beta}))\| \|C_\gamma(\hat{\beta})\|^2 \text{dist}(f, \mathcal{M})^{-p} \|w\|. \end{aligned}$$

C'est ce que l'on voulait démontrer. □

Un dernier théorème que nous utiliserons est la transformée de graphe dans le cas non-inversible (voir [11] théorème 6.4). Dans celui-ci $B_l(0, R)$ désigne la boule de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{C}^l .

Théorème 16. (*transformée de graphe cas non-inversible*)

Soient $A : \mathbb{C}^{k_1} \rightarrow \mathbb{C}^{k_1}$, $B : \mathbb{C}^{k_2} \rightarrow \mathbb{C}^{k_2}$ des applications linéaires avec $k = k_1 + k_2$. On suppose A inversible, $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ et on note $\xi = 1 - \|B\| \|A^{-1}\| \in]0, 1]$. Soient $0 \leq \xi_0 \leq 1$ et $\delta > 0$ tels que :

$$\xi_0(1 - \xi) + 2\delta(1 + \xi_0)\|A^{-1}\| \leq 1 \quad \text{et}$$

$$(\xi_0\|B\| + \delta(1 + \xi_0))(\|A^{-1}\|^{-1} - \delta(1 + \xi_0))^{-1} \leq \xi_0.$$

Soit $g : B_k(0, R_0) \rightarrow B_k(0, R_1)$ holomorphe avec $R_0 \leq R_1$, $g(0) = 0$, $Dg(0) = (A, B)$ et $\|Dg(w) - Dg(0)\| \leq \delta$ sur $B_k(0, R_0)$. On a

Si $\phi : B_{k_2}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}^{k_1}$ vérifie $\phi(0) = 0$ et $\text{Lip}(\phi) \leq \xi_0$ pour un certain $R \leq R_0$ alors il existe $\psi : B_{k_2}\left(0, \frac{R}{\max(1, \|B\| + 2\delta)}\right) \rightarrow \mathbb{C}^{k_1}$ avec $\text{Lip}(\psi) \leq \xi_0$ et $g(\text{graphe}(\psi)) \subset \text{graphe}(\phi)$.

Pour obtenir cet énoncé il suffit juste d'adapter un peu la preuve du point 2 du théorème 6.4 de [11].

Remarque. Le théorème précédent a aussi un sens quand $k_1 = 0$. Dans ce cas cela revient à faire des branches inverses comme dans [5] mais dans un cas non inversible. En voici un énoncé :

Soit $g : B_k(0, R_0) \longrightarrow B_k(0, R_1)$ holomorphe avec $R_0 \leq R_1$, $g(0) = 0$, $Dg(0) = (B)$ et $\|Dg(w) - Dg(0)\| \leq \delta$ sur $B_k(0, R_0)$. Si $R \leq R_0$, on a

$$g \left(B_k \left(0, \frac{R}{\max(1, \|B\| + 2\delta)} \right) \right) \subset B_k(0, R).$$

3.2 Démonstration du théorème d'hyperbolicité

Le but de ce paragraphe est de montrer que les exposants de Lyapounov $\lambda_1 > \dots > \lambda_l$ définis précédemment sont supérieurs ou égaux à $\frac{\log(d)}{2}$. Cela généralise le théorème de Briend et Duval aux endomorphismes holomorphes aléatoires (voir [4]).

Nous allons suivre la même méthode que dans [6], [23] et [7].

Choisissons $\gamma > 0$ tel que γp soit très petit devant les différences $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, l-1$, devant les valeurs absolues des exposants non nuls et devant $\log d$ (ici le p est le même qu'au paragraphe précédent).

Nous avons montré que pour α presque tout (f_1, x) on a

$$h_{\alpha, \text{mix}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(f_1)(B_{d_{f_1}^n}(x, \epsilon)) = k \log d.$$

On va faire quelques uniformisations de cette formule.

Soit $\Lambda_{\epsilon, n} = \{(f_1, x) \in X, \mu(f_1)(B_{d_{f_1}^n}(x, \epsilon)) \leq e^{-kn \log d + \gamma n}\}$.

Si ϵ est assez petit on a

$$\begin{aligned} \frac{4}{5} &\leq \alpha \left(\left\{ (f_1, x) \in X, \liminf_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} \log \mu(f_1)(B_{d_{f_1}^n}(x, \epsilon)) \geq k \log d - \frac{\gamma}{2} \right\} \right) \\ &\leq \alpha(\cup_{n_0} \cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\epsilon, n}). \end{aligned}$$

En particulier si n_0 est grand on a $\alpha(\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\epsilon, n}) \geq 3/4$.

Rappelons que l'on note $\widehat{\Gamma}$ l'ensemble des bons points pour la théorie de Pesin de la mesure $\widehat{\alpha}$ (voir le théorème 14). On considère (toujours avec les notations de ce théorème)

$$\widehat{\Gamma}_{\alpha_0} = \left\{ \widehat{\beta} \in \widehat{\Gamma}, \alpha_0 \leq \|C_\gamma(\widehat{\beta})^{\pm 1}\| \leq \frac{1}{\alpha_0} \right\}.$$

Si α_0 est assez petit, on a $\widehat{\alpha}(\widehat{\Gamma}_{\alpha_0}) \geq 3/4$ d'où

$$\alpha(\pi(\widehat{\Gamma}_{\alpha_0}) \cap (\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\epsilon, n})) = \int \mu(f_1)(\pi(\widehat{\Gamma}_{\alpha_0}) \cap (\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\epsilon, n}) \cap \{f_1\} \times \mathbb{P}^k) d\Lambda(f_1) \geq \frac{1}{2}.$$

On obtient ainsi l'existence de f_1 avec $\mu(f_1)(A_{n_0}) \geq 1/2$ où

$$A_{n_0} = \{x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \text{ avec } (f_1, x) \in \pi(\widehat{\Gamma}_{\alpha_0}) \cap (\cap_{n \geq n_0} \Lambda_{\epsilon, n})\}$$

(car on a continué l'identification entre $\{f_1\} \times \mathbb{P}^k$ et \mathbb{P}^k). On peut aussi supposer que $f_1 \in A$ car A est de mesure pleine pour Λ .

Les points $x \in A_{n_0}$ vérifient $\mu(f_1)(B_{d_{f_1}}^n(x, \epsilon)) \leq e^{-kn \log d + \gamma n}$ pour tout $n \geq n_0$. On peut donc trouver x_1, \dots, x_N dans A_{n_0} qui sont (n, ϵ, f_1) séparés avec $N \geq \frac{1}{2}e^{kn \log d - \gamma n}$. Comme les x_i sont dans A_{n_0} , il existe $\widehat{\beta}_i \in \widehat{\Gamma}_{\alpha_0}$ bon point de Pesin avec $\pi(\widehat{\beta}_i) = (f_1, x_i)$. On va donc pouvoir appliquer la théorie de Pesin à partir du point x_i : en particulier on va construire des variétés stables approchées en chacun de ces points. Ces variétés stables vont être produites grâce à la transformée de graphe (voir le théorème 16).

3.3 Construction des variétés stables

Soit $\xi_0 > 0$ très petit devant α_0 . Dans toute la suite n est pris grand par rapport à γ et ξ_0 .

Soit x un des x_i précédents et $\widehat{\beta} \in \widehat{\Gamma}_{\alpha_0}$ qui s'envoie sur (f_1, x) par π . On note $E_1(\widehat{\beta}), \dots, E_l(\widehat{\beta})$ les sous-espaces vectoriels donnés par la théorie de Pesin dans le théorème 14. Si $\lambda_l \leq 0$, on pose $E_s(\widehat{\beta}) = \oplus_{i=m}^l E_i(\widehat{\beta})$ et $E_u(\widehat{\beta}) = \oplus_{i=1}^{m-1} E_i(\widehat{\beta})$ où $\lambda_1 > \dots > \lambda_{m-1} > 0 \geq \lambda_m > \dots > \lambda_l$ (éventuellement on a $E_u(\widehat{\beta}) = \{0\}$ si λ_1 est négatif). Si $\lambda_l > 0$ on posera $E_s(\widehat{\beta}) = E_l(\widehat{\beta})$ et $E_u(\widehat{\beta}) = \oplus_{i=1}^{l-1} E_i(\widehat{\beta})$ (éventuellement on a $E_u(\widehat{\beta}) = \{0\}$ si $l = 1$).

Maintenant, on se place dans le repère

$$C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))E_u(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta})) \oplus C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))E_s(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))$$

et on part de $\{0\}^{d_u} \times B(0, e^{-4\gamma np})$ où d_u est la dimension de $E_u(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))$ et $B(0, e^{-4\gamma np})$ est la boule de centre 0 et de rayon $e^{-4\gamma np}$ dans \mathbb{C}^{k-d_u} . Cet ensemble est un graphe $(\Phi_{n-1}(Y), Y)$ au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))E_s(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))$ (avec $\Phi_{n-1}(Y) = 0$).

On va tirer en arrière ce graphe en utilisant la transformée de graphe dans le cas non inversible du théorème 16.

Lemme 17. *Il existe un graphe $(\Phi_{n-2}(Y), Y)$ au-dessus de $B(0, e^{-4\gamma np - 2\gamma}) \subset C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))E_s(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))$ si $\lambda_l \leq 0$ ou au-dessus de $B(0, e^{-4\gamma np - \lambda_l - 2\gamma}) \subset C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))E_s(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))$ si $\lambda_l > 0$ avec $\text{Lip } \Phi_{n-2} \leq \xi_0$ et $g_{\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})}(\text{graphe de } \Phi_{n-2}) \subset \text{graphe de } \Phi_{n-1}$.*

Démonstration. Par la proposition 15, dans le repère

$$C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))E_u(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})) \oplus C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))E_s(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})),$$

on peut écrire $g_{\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})}$ sous la forme

$$g_{\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})}(X, Y) = (A_{n-2}X + R_{n-2}(X, Y), B_{n-2}Y + U_{n-2}(X, Y))$$

avec :

$$Dg_{\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})}(0) = A_\gamma(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})) = (A_{n-2}, B_{n-2})$$

et

$$\begin{aligned} & \max(\|DR_{n-2}(X, Y)\|, \|DU_{n-2}(X, Y)\|) \\ & \leq C \operatorname{dist}(f_{n-1}, \mathcal{M})^{-p} \|C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))\| \|C_\gamma(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))\|^2 \|(X, Y)\| \end{aligned}$$

pour $\|(X, Y)\| \leq \frac{\epsilon_1 \operatorname{dist}(f_{n-1}, \mathcal{M})^p}{C \|C_\gamma(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))\|}$ (ici $f_{n-1} = F^{n-2}(f_1)$).

On veut utiliser la transformée de graphe dans le cas non inversible (voir le théorème 16).

Pour cela, plaçons nous dans un premier temps dans le cas où $d_u > 0$. On a A_{n-2} qui est inversible car les exposants associés à E_u ne valent pas $-\infty$. Par ailleurs, par le théorème 14

$$\|B_{n-2}\| \leq e^\gamma \text{ et } \|A_{n-2}^{-1}\|^{-1} \geq e^{\lambda_{m-1}-\gamma}$$

dans le cas où $\lambda_l \leq 0$ et

$$\|B_{n-2}\| \leq e^{\lambda_l+\gamma} \text{ et } \|A_{n-2}^{-1}\|^{-1} \geq e^{\lambda_{l-1}-\gamma}$$

si $\lambda_l > 0$.

En prenant les notations du théorème 16 et en utilisant le fait que γ est choisi petit par rapport aux différences entre les exposants de Lyapounov et par rapport aux valeurs absolues des exposants non nuls, on en déduit que

$$1 - \xi = \|B_{n-2}\| \|A_{n-2}^{-1}\| \leq e^{-\lambda_{m-1}+2\gamma} \leq e^{-\gamma} < 1$$

dans le premier cas et

$$1 - \xi = \|B_{n-2}\| \|A_{n-2}^{-1}\| \leq e^{\lambda_l-\lambda_{l-1}+2\gamma} \leq e^{-\gamma} < 1$$

dans le second.

Estimons maintenant le δ du théorème 16. On a

$$\|Dg_{\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})}(0) - Dg_{\sigma^{n-2}(\widehat{\beta})}(w)\| \leq C \operatorname{dist}(f_{n-1}, \mathcal{M})^{-p} \|C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))\| \|C_\gamma(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))\|^2 \|w\|$$

pour $\|w\| \leq \frac{\epsilon_1 \operatorname{dist}(f_{n-1}, \mathcal{M})^p}{C \|C_\gamma(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))\|}$.

Comme $f_1 \in A$, on a par le lemme 9 de [8] $\operatorname{dist}(f_n, \mathcal{M}) \geq c(f_1)e^{-\gamma n}$ pour tout $n \geq 1$. De plus, $\|C_\gamma^{\pm 1}\|$ étant tempérées, on peut supposer que

$$\|C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-1}(\widehat{\beta}))\| \|C_\gamma(\sigma^{n-2}(\widehat{\beta}))\|^2 \leq \frac{1}{\alpha_0^3} e^{3\gamma n}.$$

On en déduit que

$$\|Dg_{\sigma^{n-2}(\hat{\beta})}(0) - Dg_{\sigma^{n-2}(\hat{\beta})}(w)\| \leq e^{-\gamma n}$$

si $\|w\| \leq e^{-2\gamma np}$ et n est assez grand car on a supposé que $p \geq 5$.

Pour n assez grand, le δ du théorème 16 est donc aussi petit que l'on veut et on peut appliquer ce théorème avec $R = e^{-4\gamma np}$ et $R_0 = e^{-2\gamma np}$ pour obtenir un graphe $(\Phi_{n-2}(Y), Y)$ qui est défini sur

$$B\left(0, \frac{e^{-4\gamma np}}{\max(1, \|B_{n-2}\| + 2\delta)}\right) \subset C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-2}(\hat{\beta}))E_s(\sigma^{n-2}(\hat{\beta})) = \mathbb{C}^{k-d_u}$$

avec $\text{Lip}(\Phi_{n-2}) \leq \xi_0$ et $g_{\sigma^{n-2}(\hat{\beta})}(\text{graphe de } \Phi_{n-2}) \subset \text{graphe de } \Phi_{n-1}$.

En utilisant les estimées sur $\|B_{n-2}\|$ précédentes et en prenant n grand par rapport à γ , on obtient le lemme dans le cas où $d_u > 0$.

Si $d_u = 0$, il n'y a pas de A_{n-2} et on est dans la situation de la remarque qui suit le théorème 16. On prend $R = e^{-4\gamma np}$ et $R_0 = e^{-2\gamma np}$ et on a

$$g_{\sigma^{n-2}(\hat{\beta})}\left(B\left(0, \frac{e^{-4\gamma np}}{\max(1, \|B_{n-2}\| + 2\delta)}\right)\right) \subset B(0, e^{-4\gamma np}).$$

Quand $\lambda_1 \leq 0$, on a $\|B_{n-2}\| \leq e^\gamma$ et pour n assez grand

$$g_{\sigma^{n-2}(\hat{\beta})}\left(B(0, e^{-4\gamma np - 2\gamma})\right) \subset B(0, e^{-4\gamma np})$$

et cela donne le lemme dans ce cas.

Quand $\lambda_1 > 0$, cela signifie que $l = 1$ (car $d_u = 0$). On a $\|B_{n-2}\| \leq e^{\lambda_l + \gamma}$ et pour n assez grand

$$g_{\sigma^{n-2}(\hat{\beta})}\left(B(0, e^{-4\gamma np - \lambda_l - 2\gamma})\right) \subset B(0, e^{-4\gamma np})$$

et cela donne aussi le lemme dans ce dernier cas. □

Maintenant on recommence ce que l'on vient de faire avec $g_{\sigma^{n-3}(\hat{\beta})}$ à la place de $g_{\sigma^{n-2}(\hat{\beta})}$. On se place toujours dans une boule $\|w\| \leq e^{-2\gamma np}$ de sorte à avoir le δ plus petit que $e^{-\gamma n}$ et on prend $R = e^{-4\gamma np - 2\gamma}$ ou $R = e^{-4\gamma np - \lambda_l - 2\gamma}$ suivant le cas où l'on se trouve. On obtient ainsi un graphe $(\Phi_{n-3}(Y), Y)$ au-dessus de $B(0, e^{-4\gamma np - 4\gamma}) \subset C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-3}(\hat{\beta}))E_s(\sigma^{n-3}(\hat{\beta}))$ si $\lambda_l \leq 0$ ou au-dessus de $B(0, e^{-4\gamma np - 2\lambda_l - 4\gamma}) \subset C_\gamma^{-1}(\sigma^{n-3}(\hat{\beta}))E_s(\sigma^{n-3}(\hat{\beta}))$ si $\lambda_l > 0$. Ce graphe vérifie $\text{Lip } \Phi_{n-3} \leq \xi_0$ et $g_{\sigma^{n-3}(\hat{\beta})}(\text{graphe de } \Phi_{n-3}) \subset \text{graphe de } \Phi_{n-2}$.

On continue ainsi le procédé. A la fin on obtient un graphe $(\Phi_0(Y), Y)$ au-dessus $B(0, e^{-4\gamma np - 2n\gamma}) \subset C_\gamma^{-1}(\hat{\beta})E_s(\hat{\beta})$ si $\lambda_l \leq 0$ ou au-dessus de $B(0, e^{-4\gamma np - n\lambda_l - 2n\gamma}) \subset C_\gamma^{-1}(\hat{\beta})E_s(\hat{\beta})$ si $\lambda_l > 0$. Ce graphe vérifie $\text{Lip } \Phi_0 \leq \xi_0$ et $g_{\hat{\beta}}(\text{graphe de } \Phi_0) \subset \text{graphe de } \Phi_1$. Son image par $\tau_x \circ C_\gamma(\hat{\beta})$ est la variété stable approchée de x que l'on cherchait. On la notera $W_s(x)$.

Ces variétés stables vérifient la propriété suivante :

Lemme 18. Pour $l = 0, \dots, n-1$ on a

$$f_l \circ \dots \circ f_1(W_s(x)) \subset B(f_l \circ \dots \circ f_1(x), e^{-\gamma n}).$$

Ici $f_l \circ \dots \circ f_1 = Id$ pour $l = 0$ par convention.

Démonstration. On a par construction que pour $l = 0, \dots, n-2$

$$g_{\sigma^l(\hat{\beta})} \circ \dots \circ g_{\hat{\beta}}(\text{graphe de } \Phi_0) \subset \text{graphe de } \Phi_{l+1} \subset B(0, e^{-2\gamma np}).$$

Mais $\sigma^l(\hat{\beta})$ se projette par π sur $\tau^l(\beta) = (f_{l+1}, f_l \circ \dots \circ f_1(x))$ d'où

$$\begin{aligned} g_{\sigma^l(\hat{\beta})} \circ \dots \circ g_{\hat{\beta}} &= C_\gamma^{-1}(\sigma^{l+1}(\hat{\beta})) \circ (f_{l+1})_{f_l \circ \dots \circ f_1(x)} \circ \dots \circ (f_1)_x \circ C_\gamma(\hat{\beta}) \\ &= C_\gamma^{-1}(\sigma^{l+1}(\hat{\beta})) \circ \tau_{f_{l+1} \circ \dots \circ f_1(x)}^{-1} \circ f_{l+1} \circ \dots \circ f_1 \circ \tau_x \circ C_\gamma(\hat{\beta}). \end{aligned}$$

On a donc

$$C_\gamma^{-1}(\sigma^{l+1}(\hat{\beta})) \circ \tau_{f_{l+1} \circ \dots \circ f_1(x)}^{-1} \circ f_{l+1} \circ \dots \circ f_1(W_s(x)) \subset B(0, e^{-2\gamma np})$$

qui donne bien pour n grand

$$f_{l+1} \circ \dots \circ f_1(W_s(x)) \subset B(f_{l+1} \circ \dots \circ f_1(x), e^{-\gamma n})$$

grâce au contrôle de $\|C_\gamma(\hat{\beta})\|$ par $1/\alpha_0$, le fait que C_γ est tempérée et le contrôle des dérivées premières de τ_y sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. □

3.4 Fin de la preuve du théorème d'hyperbolicité

Pour chaque x_i ($i = 1, \dots, N$) on a construit un graphe Φ_0 au-dessus d'une partie de $C_\gamma^{-1}(\hat{\beta}_i)E_s(\hat{\beta}_i)$. Le volume $2(k - d_u)$ -dimensionnel réel de ce graphe est minoré par $e^{2(k-d_u)(-4\gamma np - 2\gamma n)} \geq e^{-16k\gamma np}$ si $\lambda_l \leq 0$ et par $e^{2(k-d_u)(-4\gamma np - n\lambda_l - 2\gamma n)} \geq e^{-2(k-d_u)n\lambda_l - 16k\gamma np}$ si $\lambda_l > 0$. Quand on prend l'image de ce graphe par $C_\gamma(\hat{\beta}_i)$, on obtient un graphe au-dessus d'une partie de $E_s(\hat{\beta}_i)$ dans le repère $E_u(\hat{\beta}_i) \oplus E_s(\hat{\beta}_i)$. Si $(\Phi(Y), Y)$ est l'un d'eux, on a $Lip(\Phi) \leq \frac{\xi_0}{\alpha_0^2}$ qui est aussi petit que l'on veut car on a pris ξ_0 petit devant α_0 . Quitte à remplacer N par N/K où K est une constante qui ne dépend que de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, on peut supposer que tous ces graphes vivent dans une carte fixée $\psi : U \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et que les x_i sont à distance au moins ϵ_0 du bord de U (cela signifie que τ_{x_i} est égal à ψ modulo une translation). Toujours quitte à remplacer N par N/K , on peut supposer que les graphes précédents sont des graphes au-dessus d'un plan complexe P de dimension $k - d_u$ pour la projection orthogonale et que la projection de chaque graphe sur P a un volume supérieur à $e^{-16k\gamma np}$ si $\lambda_l \leq 0$ et supérieur à $e^{-2(k-d_u)n\lambda_l - 16k\gamma np}$ si $\lambda_l > 0$ (quitte à rediviser par une constante).

La projection orthogonale de l'union des N variétés $\psi^{-1}(W_s(x_i))$ sur P a donc un volume supérieur à $Ne^{-16k\gamma np}$ si $\lambda_l \leq 0$ et supérieur à $Ne^{-2(k-d_u)n\lambda_l-16k\gamma np}$ si $\lambda_l > 0$. En particulier, comme la projection orthogonale de U sur P peut être supposée compacte, on peut trouver un plan complexe L de dimension d_u orthogonal à P tel que le nombre d'intersection entre L et $\cup_{i=1}^N \psi^{-1}(W_s(x_i))$ est supérieur à $N' = Ne^{-16k\gamma np}$ si $\lambda_l \leq 0$ et supérieur à $N' = Ne^{-2(k-d_u)n\lambda_l-16k\gamma np}$ si $\lambda_l > 0$ (éventuellement divisé par une constante). Remarquons juste que dans le cas où $d_u = 0$, ce plan complexe n'est rien d'autre qu'un point L qui est dans un nombre supérieur à $N' = Ne^{-16k\gamma np}$ de $\psi^{-1}(W_s(x_i))$ si $\lambda_l \leq 0$ ou dans un nombre supérieur à $N' = Ne^{-2(k-d_u)n\lambda_l-16k\gamma np}$ de $\psi^{-1}(W_s(x_i))$ si $\lambda_l > 0$.

Replaçons-nous dans le cas général. L'intersection entre chaque $\psi^{-1}(W_s(x_i))$ et L se fait en au plus un point car ce sont des graphes au-dessus de P . Notons $y_1, \dots, y_{N'}$ ces points d'intersections et pour d'alléger les notations, supposons qu'ils correspondent à $x_1, \dots, x_{N'}$.

Nous allons majorer N' en utilisant un argument d'entropie et de volume associé à L . Nous obtiendrons ainsi une contradiction dans le cas où $\lambda_l \leq 0$ et la minoration de λ_l cherchée dans l'autre cas.

Le plan complexe L dans la carte correspond si on veut à un plan projectif R dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ qui contient $\psi(L \cap U)$. Le point crucial est le suivant :

Lemme 19. *Les points $\psi(y_1), \dots, \psi(y_{N'})$ sont des points de R qui sont $(n, \frac{\epsilon}{2}, f_1)$ -séparés si n est assez grand par rapport à ϵ .*

Démonstration. Soient $i, j \in \{1, \dots, N'\}$ avec $i \neq j$. Par construction, chaque point $\psi(y_i)$ se trouve dans $R \cap W_s(x_i)$ et les points x_i sont (n, ϵ, f_1) séparés. Il existe donc $0 \leq l \leq n-1$ avec $\text{dist}(f_l \circ \dots \circ f_1(x_i), f_l \circ \dots \circ f_1(x_j)) \geq \epsilon$.

Maintenant, par le lemme précédent

$$f_l \circ \dots \circ f_1(W_s(x_i)) \subset B(f_l \circ \dots \circ f_1(x_i), e^{-\gamma n})$$

d'où $\text{dist}(f_l \circ \dots \circ f_1(x_i), f_l \circ \dots \circ f_1(\psi(y_i))) \leq e^{-\gamma n} < \frac{\epsilon}{4}$ pour n assez grand et on a la même chose en remplaçant i par j .

En utilisant que la distance entre $f_l \circ \dots \circ f_1(x_i)$ et $f_l \circ \dots \circ f_1(x_j)$ est plus grande que ϵ , on obtient donc

$$\text{dist}(f_l \circ \dots \circ f_1(\psi(y_i)), f_l \circ \dots \circ f_1(\psi(y_j))) > \frac{\epsilon}{2}.$$

C'est ce que l'on voulait démontrer. □

Remarquons qu'avec ce lemme nous avons déjà le théorème d'hyperbolicité dans le cas où $d_u = 0$. En effet, comme tous les $\psi(y_i)$ sont égaux au point $\psi(L)$, ils ne peuvent pas être $(n, \frac{\epsilon}{2}, f_1)$ -séparés. On a donc $N' \leq 1$. Comme $N \geq \frac{1}{2}d^{kn}e^{-\gamma n}$, on obtient ainsi une contradiction dans le cas où $\lambda_l \leq 0$ et lorsque $\lambda_l > 0$ (i.e. $l = 1$ car $d_u = 0$), on a

$$\frac{1}{2}d^{kn}e^{-\gamma n}e^{-2kn\lambda_l-16k\gamma np} \leq N' \leq 1$$

ce qui donne bien $\lambda_l \geq \frac{\log d}{2}$.

On suppose donc dans la suite que $d_u > 0$ et il reste à majorer le cardinal d'un ensemble $(n, \frac{\epsilon}{2}, f_1)$ -séparés dans R pour obtenir la majoration de N' . Pour cela, on va utiliser la méthode de Gromov (voir [17]) comme dans la preuve du théorème 9.

Pour $i = 1, \dots, N'$, les $\psi(y_i) \in R$ donnent des points

$$Y_i = (\psi(y_i), f_1(\psi(y_i)), \dots, f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(\psi(y_i)))$$

qui sont $\frac{\epsilon}{2}$ -séparés dans $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$. Les boules $B(Y_i, \frac{\epsilon}{4})$ sont donc disjointes et si on note

$$\Gamma_n := \{(x, f_1(x), \dots, f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(x)), x \in R\},$$

le théorème de Lelong implique que le volume de Γ_n intersecté avec une boule $B(Y_i, \frac{\epsilon}{4})$ est minoré par $C(d_u) \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^{2d_u}$. Cela donne une minoration du volume de Γ_n par $C(d_u) \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^{2d_u} N'$.

On va maintenant majorer ce volume comme dans la preuve du théorème 9, en utilisant la cohomologie des f_i .

Soit $\omega_n = \sum_{i=1}^n \pi_i^* \omega$ où π_i ($i = 1, \dots, n$) est la projection de $(\mathbb{P}^k(\mathbb{C}))^n$ sur sa i -ème coordonnée et ω est la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Le volume de Γ_n est égal à

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} \omega_n^{d_u} &= \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_{d_u} \leq n} \int_{\Gamma_n} \pi_{n_1}^* \omega \wedge \dots \wedge \pi_{n_{d_u}}^* \omega \\ &= \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_{d_u} \leq n} \int_R (f_{n_1-1} \circ \dots \circ f_1)^* \omega \wedge \dots \wedge (f_{n_{d_u}-1} \circ \dots \circ f_1)^* \omega. \end{aligned}$$

Comme f_1 est dans A , les f_i sont des endomorphismes holomorphes de degré d . En particulier, $(f_{n_1-1} \circ \dots \circ f_1)^* \omega$ est cohomologue à $d^{n_1-1} \omega$ et alors

$$\int_{\Gamma_n} \omega_n^{d_u} = \sum_{1 \leq n_1, \dots, n_{d_u} \leq n} d^{n_1+\dots+n_{d_u}} d^{-d_u} \leq n^{d_u} d^{-d_u} d^{nd_u}.$$

On obtient ainsi

$$N' \leq \frac{n^{d_u} d^{-d_u} d^{nd_u}}{C(d_u) \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^{2d_u}}.$$

Si on fait le bilan, dans le cas où $\lambda_l \leq 0$ on a pour n grand

$$\frac{1}{2}d^{kn}e^{-\gamma n}e^{-16k\gamma np} \leq Ne^{-16k\gamma np} = N' \leq \frac{n^{d_u} d^{-d_u} d^{nd_u}}{C(d_u) \left(\frac{\epsilon}{4}\right)^{2d_u}}$$

qui est absurde car $d_u < k$ et dans le cas où $\lambda_l > 0$, on a pour n grand

$$\frac{1}{2}d^{kn}e^{-\gamma n}e^{-2(k-d_u)n\lambda_l-16k\gamma np} \leq Ne^{-2(k-d_u)n\lambda_l-16k\gamma np} = N' \leq \frac{n^{d_u}d^{-d_u}d^{nd_u}}{C(d_u)\left(\frac{\epsilon}{4}\right)^{2d_u}}$$

ce qui donne bien que $\lambda_l \geq \frac{\log d}{2}$.

Références

- [1] L. M. Abramov et V. A. Rohlin, *Entropy of a skew product of mappings with invariant measure*, Vestnik Leningrad University, **17** (1962), 5-13 = A.M.S. Transl. Series 2, **48** (1966), 255-265.
- [2] T. Bogenschütz, *Entropy, pressure, and a variational principle for random dynamical systems*, Random Comput. Dynam., **1** (1992/1993), 99-116.
- [3] T. Bogenschütz et H. Crauel, *The Abramov-Rokhlin formula*, Lecture Notes in Math., **1514** (1992), 32-35.
- [4] J.-Y. Briend et J. Duval, *Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de \mathbb{CP}^k* , Acta Math., **182** (1999), 143-157.
- [5] J.-Y. Briend et J. Duval, *Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$* , IHES Publ. Math., **93** (2001), 145-159.
- [6] J. Buzzi, *Entropy, volume growth and Lyapunov exponents*. Préprint (1996).
- [7] H. De Thélin *Sur les exposants de Lyapounov des applications méromorphes*, Invent. Math., **172** (2008), 89-116.
- [8] H. De Thélin, *Endomorphismes aléatoires dans les espaces projectifs I*. Préprint (2012).
- [9] T.-C. Dinh et C. Dupont, *Dimension de la mesure d'équilibre d'applications méromorphes*, J. Geom. Anal., **14** (2004), 613-627.
- [10] T.-C. Dinh et N. Sibony, *Distribution des valeurs de transformations méromorphes et applications*, Comment. Math. Helv., **81** (2006), 221-258.
- [11] C. Dupont, *Large entropy measures for endomorphisms of \mathbb{CP}^k* , à paraître dans Israel J. Math., arXiv :0911.4675.
- [12] J.E. Fornæss et N. Sibony, *Random iterations of rational functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **11** (1991), 687-708.
- [13] J.E. Fornæss et N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimensions*, Complex Potential Theory (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **439**, Kluwer, Dordrecht (1994), 131-186.
- [14] J.E. Fornæss et N. Sibony, *Complex dynamics in higher dimension I*, Astérisque, **222** (1994), 201-231.
- [15] J.E. Fornæss et B. Weickert, *Random iteration in \mathbb{P}^k* , Ergodic Theory Dynam. Systems, **20** (2000), 1091-1109.
- [16] G. Froyland, S. Lloyd et A. Quas, *Coherent structures and isolated spectrum for Perron-Frobenius cocycles*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **30** (2010), 729-756.
- [17] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math., **49** (2003), 217-235.
- [18] M. Jonsson, *Dynamics of polynomial skew products on \mathbb{C}^2* , Math. Ann., **314** (1999), 403-447.

- [19] M. Jonsson, *Ergodic properties of fibered rational maps*, Ark. Mat., **38** (2000), 281-317.
- [20] Y. Kifer, *Ergodic theory of random transformations*, Birkhäuser Boston (1986).
- [21] F. Ledrappier et P. Walters, *A relativised variational principle for continuous transformations*, J. London Math. Soc., **16** (1977), 568-576.
- [22] R. Mañé, *Lyapounov exponents and stable manifolds for compact transformations*, Lecture Notes in Math., **1007** (1983), 522-577.
- [23] S. E. Newhouse, *Entropy and volume*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **8** (1988), 283-299.
- [24] P. Thieullen, *Fibrés dynamiques asymptotiquement compacts. Exposants de Lyapounov. Entropie. Dimension*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **4** (1987), 49-97.
- [25] Y. J. Zhu, *Two notes on measure-theoretic entropy of random dynamical systems*, Acta Math. Sin., **25** (2009), 961-970.

Henry De Thélin, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539),
 F-93430, Villetaneuse, France.
 dethelin@math.univ-paris13.fr